部分空間法における原点の位置の影響
The Effect of Positioning the Origin for the Subspace Method

岩村 雅一 * Masakazu IWAMURA　**大町 真一郎** * Shinichiro OMACHI　**阿曽 弘具** * Hirotomo ASO

1. まえがき

部分空間法は各クラスを特徴空間の部分空間で表現し，部分空間を基に分類する手法である．部分空間法を用いたパターン認識は少ない計算量で高い認識性能を実現でき，必要なパラメータも部分空間の次元数のみである [3].

各クラスの分布を表現する部分空間は，相関行列から求めた固有ベクトルで構成される．相関行列の計算は座標の原点を基準に考えるが，この原点は特徴量の原点に過ぎず，認識においては識別に有利な原点の位置が存在すると考えられる．ところが，学習部分空間法を始めとして，これまでの研究では原点の位置に関しては考慮されてこなかった．

部分空間法では，第 1 固有ベクトルを含む低次の固有ベクトルが認識に寄与していることが実験的に示されている [1]．本論文では，相関行列の第 1 固有ベクトルとそれ以外の固有ベクトルの意味の違いから，原点の位置は主に第 1 固有ベクトルに影響を与えることを導き，部分空間法において原点の位置が認識性能に与える影響を考察する．部分空間法としては CLAFIC 法 [2] を用い，簡単のために 2 クラス問題を対象とする．

2. CLAFIC 法

2.1 学習

特徴量の次元数を d とする．$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_t$ を学習サンプルとすると，相関行列 $\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

となる．$\boldsymbol{\psi}_i$ を $\boldsymbol{R}$ の第 i 固有ベクトルとする．

2.2 認識

$\boldsymbol{x}$ をテストサンプルとする．部分空間法の類似度 $s(\boldsymbol{x})$ は式(2) で表わされ，サンプル $\boldsymbol{x}$ は類似度 $s(\boldsymbol{x})$ が最大になるクラスに属する．

$$s(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{r} \left(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\psi}_i \right)^2 \tag{2}$$

ただし，r は認識に用いる部分空間の次元数を表すパラメータである．

3. 相関行列の固有ベクトルの意味

3.1 共分散行列と相関行列の関係

$\boldsymbol{\mu}$ を次式で定義される平均ベクトルとする．

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} \boldsymbol{x}_i \tag{3}$$

共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ は $\boldsymbol{\mu}$ を用いて

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

となる．式(1) と式(4) から $\boldsymbol{\Sigma}$ と $\boldsymbol{R}$ の関係

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

が導かれる．

3.2 相関行列，共分散行列の固有ベクトルと平均ベクトルの関係

$\boldsymbol{\Sigma}$ の第 i 固有値，固有ベクトルを λ_i，$\boldsymbol{\phi}_i$ とおくと，

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^{v} \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

と展開できる．ただし，v は固有値の数である．式(5) と式(6) から次式が導ける．

$$\boldsymbol{R} = \|\boldsymbol{\mu}\|^2 \left(\frac{\boldsymbol{\mu}}{\|\boldsymbol{\mu}\|} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\mu}}{\|\boldsymbol{\mu}\|} \right)^{\mathrm{T}} + \sum_{i=1}^{v} \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

共分散行列の固有値展開は分散最大基準であることから，最大の分散を表す第 1 固有値 λ_1 が $\|\boldsymbol{\mu}\|^2 > \lambda_1$ を満たすとき，$\frac{\boldsymbol{\mu}}{\|\boldsymbol{\mu}\|}$ は $\boldsymbol{R}$ の第 1 固有ベクトル $\boldsymbol{\psi}_1$ に相当する．$i = 1, \ldots, v$ について $\boldsymbol{\phi}_i$ と $\boldsymbol{\psi}_1$ を正規直交化したベクトルを $\boldsymbol{\phi}'_i$ とおく．これは $\boldsymbol{\Sigma}$ の全ての固有ベクトルから $\boldsymbol{\psi}_1$ 成分を取り除くことに等しい．$\boldsymbol{\phi}'_i$ をこのようにおけば，$\boldsymbol{\phi}'_i$ $(1 \leq i \leq v)$ が $\boldsymbol{R}$ の第 $i+1$ 固有ベクトル $\boldsymbol{\psi}_{i+1}$ に相当する．共分散行列は原点に依存しないので，$\boldsymbol{\phi}_i$ に対して行った直交化の効果を無視すれば，相関行列の固有ベクトルの中で原点の位置の影響を受けるのは第 1 固有ベクトルのみである．

以上の議論から $\|\boldsymbol{\mu}\|^2 > \lambda_1$ を満たすとき，第 1 固有ベクトルは平均ベクトルに相当し，第 2 固有ベクトル以降は平均ベクトルからのずれを表すものと解釈できる．

原点の位置の違いに大きな影響を受ける第 1 固有ベクトルのみを考えた場合，部分空間法の識別境界は図 1 の実線のようになる．図中の 2 つの分布は分散が等しい等方性正規分布で，点線はベイズエラーを達成する識別境界である．原点の位置によっては図 1 のように，ベイズエラーを達成する識別境界と部分空間法の識別境界が大きく異なる場合が考えられる．

4. 原点の位置による認識性能の変化

8 次元の等方性正規分に従う人工サンプルを作成し，原点の位置の変化が部分空間法の認識性能に及ぼす影響を調べる．サンプルのノルムを 1 にする正規化は行わない．

---

*東北大学, Tohoku University

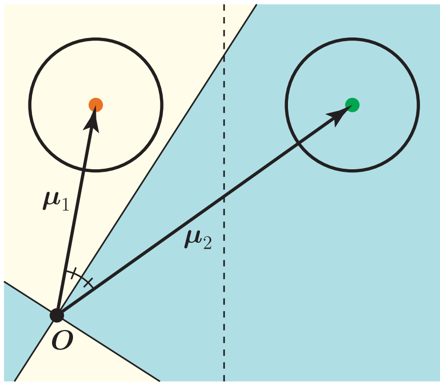

図 1: 第 1 固有ベクトルのみを用いた場合の識別境界

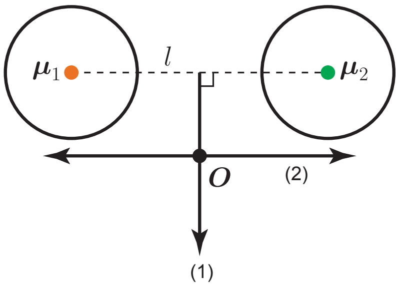

図 2: 原点の移動方向

認識の際の原点を特徴量の原点 $\boldsymbol{O}$ と区別し，$\boldsymbol{O}'$ とする．このとき式(1) と式(2) の具体的な計算は，$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{O}', \ldots, \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{O}', \boldsymbol{x} - \boldsymbol{O}'$ に置き換えて行う．

クラス 1，クラス 2 の平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}_1$，$\boldsymbol{\mu}_2$ がそれぞれ

$$\boldsymbol{\mu}_1 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 0) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\mu}_2 = (-1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, -2) \tag{9}$$

である 2 クラス問題を考え，各クラスの分散は 1 とする．平均間を結ぶ線分を l とおく．原点は (1) l の垂直二等分線上を l から離れる方向，(2) l と平行な方向，へ移動する (図 2 参照)．

学習用に各クラス 1,000 個ずつのサンプルを用い，テストサンプルとして学習サンプルには含まれない 1,000 個のサンプルを用いる．認識実験は各 1,000 回ずつ行い，認識率の平均を示す．部分空間法で用いる固有ベクトルの数 (式(2) の r) は 1 とする．

原点を方向 (1) へ移動した場合，すなわち $\boldsymbol{O}' = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -x, x)$ としたときの認識結果を図 3 に，方向 (2) へ移動した場合，すなわち $\boldsymbol{O}' = (y, y, y, y, y, y, y, y)$ としたときの認識結果を図 4 に示す．原点を方向 (1) へ移動した場合，原点が l から離れるほど認識率が高く，方向 (2) へ移動した場合，l の二等分線上付近に原点があるときが最も認識率が高く，二等分線から離れるほど認識率が低下した．特徴量の原点をそのまま用いる場合 ($x = 0, y = 0$ の場合) よりも原点を移動したほうが高い認識率が得られた ($x = 4$ の場合等) ことから，部分空間法において，原点を考慮することで認識性能が向上することが確認できた．

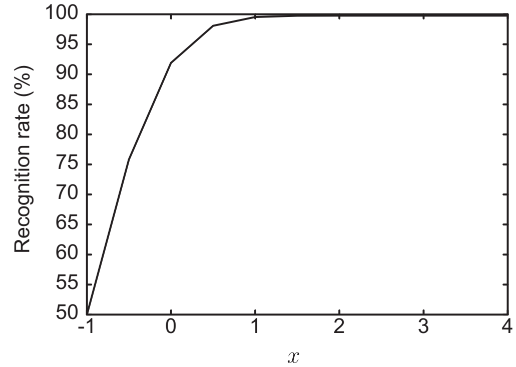

図 3: 原点を方向 (1) へ移動したときの認識結果

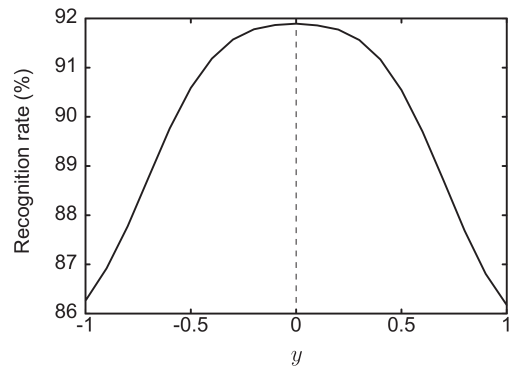

図 4: 原点を方向 (2) へ移動したときの認識結果

5. まとめ

本論文ではパターン認識の代表的な手法である部分空間法 (CLAFIC 法) について，原点の位置が相関行列の固有ベクトルに与える影響を理論的に考察し，認識性能への影響を実験的に調査した．その結果，原点の位置の違いは主に相関行列の第 1 固有ベクトルに影響を与え，その影響は認識性能にも及ぶことが示された．

本論文で指摘した問題はサンプルのノルムを 1 に正規化した場合でも同様に確認できることから，部分空間法において本質的な問題であるといえる．

参考文献

[1] 岩村雅一, 大町真一郎, 阿曽弘具. 認識率に寄与する文字画像の固有ベクトル. 平成 10 年度電気関係学会東北支部連合大会, 2G-24, p. 286, 1998.

[2] 石井健一郎, 上田修功, 前田英作, 村瀬洋. わかりやすいパターン認識. オーム社, 東京, 1998.

[3] 津田宏治. ヒルベルト空間における部分空間法. 信学論 (D-II), Vol. J82-D-II, No. 4, pp. 592–599, April 1999.