

次元数の異なる部分空間同士の近似最近傍部分空間探索

山本 大貴[†] 岩村 雅一[†] 黄瀬 浩一[†]

[†] 大阪府立大学大学院工学研究科
〒599-8531 大阪府堺市中区学園町 1-1

E-mail: [†]yamamoto@m.cs.osakafu-u.ac.jp, ^{††}{masa,kise}@cs.osakafu-u.ac.jp

あらまし パターンを部分空間で表現する手法がパターン認識やコンピュータビジョンの分野において広く利用されている。部分空間を使ってクエリのパターンを認識する際、部分空間同士の類似度を計算する。この部分空間同士の類似度計算は計算コストが高く、1対1の計算をする必要があるため、データベースが大きいと処理時間が膨大となってしまう。扱う問題の大規模化に伴い、類似度計算の近似、そして探索対象の効率的な絞り込みが必要とされている。そのような近似手法にグラスマン多様体を用いられる。グラスマン多様体は、同じ次元数の部分空間の集合であり、グラスマン多様体上において、部分空間は点で表現される。このことから、グラスマン多様体上での近似最近傍探索によって、探索候補を絞り込み、高速な部分空間の探索手法が提案されている。しかし、グラスマン多様体は、次元数の異なる部分空間は扱えず、このような高速化手法が適用できる問題は限られる。また、次元数の異なる部分空間を扱う従来の手法では、特異値分解のような高コストな計算が必要であり、高速化を阻む要因となると考えられる。本稿では、次元数の異なる部分空間同士のグラスマン距離について検討を行い、次元数の異なる部分空間を同じグラスマン多様体上での類似度比較を近似的に実現し、従来の高速化手法での探索を可能にする。

キーワード 部分空間, グラスマン多様体, 近似最近傍探索, 正準角

1. はじめに

コンピュータビジョンやパターン認識の分野では、ユークリッド空間上の線型部分空間でパターンの広がりを表現するという手法が注目されており、行動認識、顔認識、歩行者の検出など幅広く用いられている [1]~[3]。パターンを部分空間で表現して、パターン認識を行う場合、クエリの部分空間に最も近い部分空間をデータベースの中から見つける問題に帰着する。この問題は最近傍部分空間探索 (Nearest Subspace Search; NSS) と呼ばれる。NSS を実現する既存の手法を表 1 にまとめ、以下で説明する。

NSS を実現する手法のひとつに相互部分空間法 [4] がある。相互部分空間法は、正準角と呼ばれる部分空間同士の角度によって、部分空間の類似度を測る。正準角は、類似度を測りたい部分空間の組毎に計算をする必要があるため、この手法を認識問題に適用した場合、クラスの数だけ正準角を計算する必要がある。さらに、正準角は固有値問題を解くことによって求められるため、クラス数が大きくなると処理時間が膨大になってしまう。

そこで、NSS の類似計算に近似を導入した近似最近傍部分空間探索 (Approximate Nearest Subspace Search; ANSS) が提案されている [5]~[9]。

ANSS の効率化の従来手法として、2 種類のアプローチがある。ひとつは、部分空間をユークリッド空間へ埋め込むものである [5], [8], [9]。この手法は、全ての部分空間を高次元のユークリッド空間へ埋め込み、高次元のユークリッド空間での近似最近傍探索を行う。しかし、変換されたユークリッド空間は非常に高次元であるため、既存の近似最近傍探索手法では効率的に部分空間を見つけることは難しい。もうひとつは、グラスマン多様体での近似最近傍探索手法を用いる方法である。グラスマン多様体は部分空間の集合によって成される多様体である。グラスマン多様体上では部分空間は点で表現され、図 1 のような、グラスマン多様体上で定義される点と点の距離をグラスマン距離という。そして、グラスマン多様体で部分空間が点で表現される特性を用いて、グラスマン多様体での近似最近傍探索により ANSS を実現する。しかし、グラスマン距離の計算

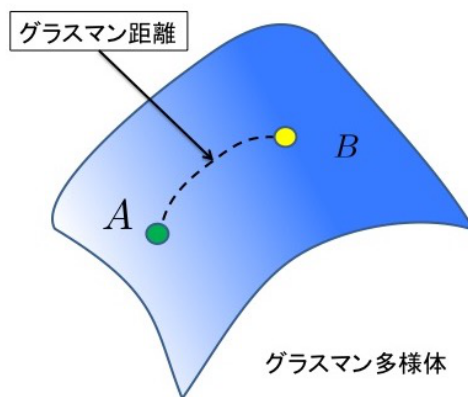


図 1: グラスマン距離のイメージ

ユークリッド空間へ埋め込み、高次元のユークリッド空間での近似最近傍探索を行う。しかし、変換されたユークリッド空間は非常に高次元であるため、既存の近似最近傍探索手法では効率的に部分空間を見つけることは難しい。もうひとつは、グラスマン多様体での近似最近傍探索手法を用いる方法である。グラスマン多様体は部分空間の集合によって成される多様体である。グラスマン多様体上では部分空間は点で表現され、図 1 のような、グラスマン多様体上で定義される点と点の距離をグラスマン距離という。そして、グラスマン多様体で部分空間が点で表現される特性を用いて、グラスマン多様体での近似最近傍探索により ANSS を実現する。しかし、グラスマン距離の計算

表 1: 最近傍部分空間探索を実現する手法の比較

		処理時間	次元数の異なる部分空間	類似度
相互部分空間法 [4]		大	扱える	正準角
ANSS	BHZ [5]	大	扱える	ユークリッド距離
	GLH [6]	大	扱えない	グラスマン距離
	小西らの手法 [7]	小	扱えない	グラスマン距離
Ye らの手法 [10]		大	扱える	グラスマン距離
提案手法		小	扱える	グラスマン距離

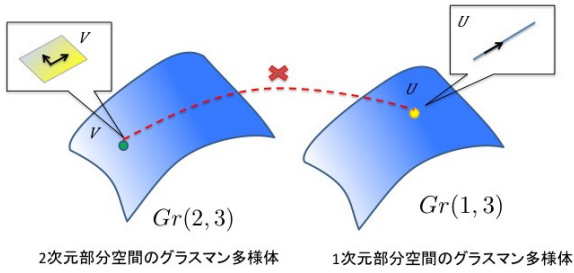


図 2: グラスマン距離が定義できない例

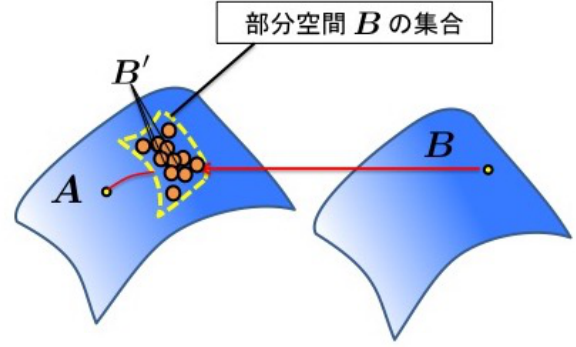


図 4: 提案手法のアイデア

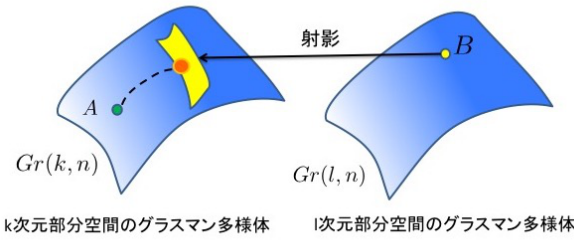


図 3: 次元数の異なる部分空間同士のグラスマン距離

は高コストであり、比較する部分空間の数が増加すると処理時間は大きくなる。これに対し部分空間数と次元数にスケラブルな手法に小西らの手法 [7] がある。小西らの手法はグラスマン距離の計算に近似を導入した最も高速な ANSS のひとつである。しかし、グラスマン多様体は同じ次元数の部分空間の集合である。そのため、図 2 のように次元数の異なる部分空間は異なるグラスマン多様体で表現され、グラスマン距離を定義出来ない。つまり、先述したようなグラスマン距離に基づく高速化手法を適用することができない。したがって、次元数の異なる部分空間が同じグラスマン多様体で扱えることが求められる。

次元数の異なる部分空間同士のグラスマン距離を定義した手法に Ye らの手法 [10] がある。Ye らの手法では、異なるグラスマン多様体上の部分空間同士のグラスマン距離を、点と集合の距離によって定義している。具体的に、次元数の異なる部分空間を A, B とし、 A, B のグラスマン距離を計算する場合、図 3 のように、部分空間を射影することによって得られた集合との距離によって、次元数の異なる部分空間のグラスマン距離

を定義している。Ye らはこの射影された集合内で最も近くなる点の射影を、特異値分解によって実現している。この特異値分解は計算コストの高い計算であり、これらの処理の後に高速化手法を適用しても ANSS の高速化は望めない。

そこで、本稿では、Ye らの手法を近似的に行うことにより、次元数の異なる部分空間同士の近似最近傍部分空間手法を提案する。Ye らの手法の問題点は、特異値分解の計算コストである。この特異値分解は集合内の最も近くなる点の計算に用いられていた。次元数の異なる部分空間同士のグラスマン距離の本質は点と集合の距離であり、集合を生成し、集合と最も近くなる距離を計算すれば特異値分解を行うことなく Ye らの手法を実現できる。提案手法では図 4 のように部分空間の射影を複数回行うことで、この集合の生成を行う。これを探索候補の全ての部分空間について行う。最後に集合が射影されたグラスマン多様体で小西らの手法を適用する。小西らの手法は、サンプルが増加に対して、処理時間の増加は緩やかであり、複数回の射影によるサンプル数の増加の影響を吸収することが期待できる。これにより、特異値分解を行うことなく、Ye らの手法の近似的に実現し、次元数の異なる部分空間同士の近似最近傍部分空間探索を高速化を可能にする。

2. 準備

本節では、本稿を理解するのに必要なグラスマン距離について説明する。

[定義 2.1] ユークリッド空間 R^D 上の m 次元の線形部分空間の集合をグラスマン多様体 $Gr(m, D)$ と呼ぶ。

グラスマン多様体上では部分空間は点とみなすことができ、グラスマン多様体上での点と点の距離をグラスマン距離 (図 1)

という。グラスマン距離は、正準角に基づいた類似度である。

2.1 Projection Kernel

グラスマン多様体上の点と点の距離を、グラスマン距離といい、複数定義される。小西らの手法では、その一つである Projection kernel [11] を使って部分空間同士の類似度を測っており、Projection kernel は以下の式で計算される。

$$k_P(U, V) = \|U^T V\|_F^2 \quad (1)$$

3. 従来手法

3.1 相互部分空間法

相互部分空間法は、部分空間法の拡張であり、入力と学習データを表現する部分空間同士のなす角度によって、類似度を測る。

ここで、 $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ 、 $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ($k < l$) によって張られる部分空間をそれぞれ A 、 B とする。この A と B の間には k 個の正準角が定義され、それぞれの正準角は互いに直交する方向において測られる。これを式で書くと、次のように表される。

$$\cos^2 \theta_i = \max_{a,b} \frac{|(a_i \cdot b_i)|^2}{\|a_i\|^2 \|b_i\|^2} \quad (2)$$

ここで、 $a_i \in A$ 、 $b_i \in B$ 、 $\|a_i\| \neq 0$ 、 $\|b_i\| \neq 0$ である。相互部分空間法では、これらの内、第 1 正準角のみを計算に用いる。この正準角の計算には、固有値問題を解く必要があり、比較する部分空間の数だけこの計算を行うため、クラスの数が増加すると処理時間が膨大となる。

3.2 小西らの手法

小西らの手法はグラスマン多様体上での近似最近傍探索手法である。これを実現するにあたって、まずグラスマン距離をユークリッド距離に分解する。そして、近似最近傍探索を用いて、グラスマン距離を近似的に計算する。類似度関数である $k_P(\cdot, \cdot)$ を分解し、それが可能であることを示す。 $P_i = [p_{i1} \dots p_{im}]$ 、 $Q = [q_1 \dots q_m]$ すると、 $P_i^T Q$ の要素は次のように表される。

$$k_P(P_i, Q) = \|P_i^T Q\|_F^2 = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^m (p_{is}^T q_t)^2 \quad (3)$$

式 (3) の右辺は m^2 個の内積計算の和であるが、すべての内積の値が式 (3) に等しく影響を及ぼしているわけではない。図 5 に示すように、ほとんどの内積は 0 に近い値を持ち、一部の内積のみが比較的大きな絶対値をとるといような分布となっている。ここで式 (3) を使用する目的が、ある部分空間に最も近い部分空間を見つけることであることを考慮すると、部分空間の大小関係が入れ替わらない程度に式 (3) を近似しても問題は起こらないと考えられる。つまり、式 (3) の 0 に近い内積を無視して、絶対値の大きな内積のみを計算することで近似的に Projection kernel の値が計算できる。ここで、単位ベクトル a, b の距離の 2 乗は、次のように表される。

$$d_{Euc}^2(a, b) = 2 - 2a^T b \quad (4)$$

これより、「ベクトルの内積の大きいものを見つけることと、ベ

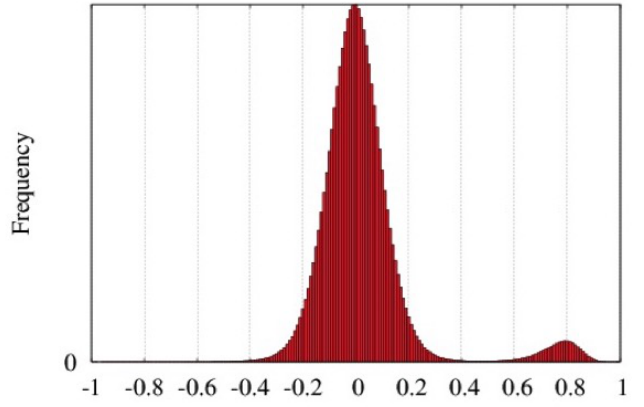


図 5: 内積のヒストグラムの一例

クトルの距離が近いものを見つけることは等価」といえる。この原理を用いれば、近似最近傍探索手法を用いて内積計算を行うことなく内積の大きなベクトルを見つけることができる。

q をクエリとすることで、近似最近傍探索で q に近いベクトルを見つける事ができるのは明らかである。また、距離が小さいベクトルだけでなく、距離が大きいベクトルも式 (3) では支配的である。 $-q$ は単位超球上で q から最も遠いベクトルなので、 $-q$ をクエリとして近似最近傍探索をすることで q から最も遠いベクトルから探索することができる。このように符号の違う 2 つのクエリベクトルを用いることで、 $P_i^T Q$ の要素 (内積) のうち、絶対値の大きいものを近似最近傍探索で上位 K を取り出し、対応する部分空間の ID に内積の 2 乗を投票する。そして、最終的の最も得票の多い部分空間を最近傍と判断する。 Q の基底が m 本の場合、1 本の基底ベクトルあたり上位 k 個を選ぶ。更に符号が逆ベクトルも含めると、基底ベクトルあたり $2k$ 個のベクトルを近似最近傍探索で求める。したがって、全体で $K = 2km$ 個のベクトルを検索することになる。データベース中の部分空間数が増加しても、 K を加減することで探索にかかる時間をコントロールできる。このような理由から、小西らの手法は部分空間数にスケラブルな探索が可能になっている。

3.3 Ye らの手法

Ye らの手法は、次元数の異なる部分空間同士のグラスマン距離を定義する。次元数の異なる部分空間同士のグラスマン距離は、点と集合の距離によって測られる。具体的には、部分空間を相手の部分空間のグラスマン多様体に射影することによって得られる集合とクエリとのグラスマン距離によって測られる。以下、図 6 を使って説明する。ここで $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ 、 $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$ ($k < l$) によって張られる次元数の異なる部分空間をそれぞれ A 、 B とする。図 6(a) の次元数の異なる部分空間 A 、 B のグラスマン距離 $\delta(A, B)$ は、 B を A の属するグラスマン多様体に射影することによって得られた集合 $\Omega_-(B)$ 内で A と最も近くなる点を Y とすると、 Y と A との距離と定義される。逆に、図 6(b) の A を B の属するグラスマン多様体に射影することによって得られた集合 $\Omega_+(A)$ 内で B と最も近くなる点を X

とすると、 X と B との距離とも定義され、どちらの方法でも同じ距離が計算される。 $\Omega_+(A)$ は A を含む l 次元部分空間の部分集合を表しており、 $\Omega_-(B)$ は B に含まれる k 次元部分空間の部分集合を表す。この距離の算出方法の説明にあたって、部分空間 A, B をそれぞれのグラスマン多様体に射影することによって得られる集合について、以下のように定義される。

[定義 3.1] $k, l, n \in \mathcal{N}$ ($k \leq l \leq n$) とする。 A, B の部分集合について以下のように表す。

$$\Omega_+(A) := \{X \in \text{Gr}(l, n) : A \subseteq X\} \quad (5)$$

$$\Omega_-(B) := \{Y \in \text{Gr}(k, n) : Y \subseteq B\} \quad (6)$$

これらの部分集合 $\Omega_+(A), \Omega_-(B)$ 内で類似度を測りたい部分空間と最も近くなる点 X, Y の算出に特異値分解を用いる。まず類似度を測りたい部分空間 A と B について内積を取る。そして得られた行列について特異値分解を行う。特異値を対角成分に持つ行列を Σ , 左特異ベクトルを U , 右特異ベクトルを V とすると、

$$AB^T = U\Sigma V \quad (7)$$

ここで、 p_i, q_i をそれぞれ AU^T, BV^T の n 次元の基底ベクトルとすると、次のように表せる。

$$AU^T = [p_1, p_2, \dots, p_k] \quad (8)$$

$$BV^T = [q_1, q_2, \dots, q_l] \quad (9)$$

AU^T は、 A を B のグラスマン多様体 $\text{Gr}(l, n)$ に射影するのに、基底 A の寄与が最も大きくなる方向への回転であり、同様に、 BV^T は、 B を A のグラスマン多様体 $\text{Gr}(k, n)$ に射影するのに、基底 B の寄与が最も大きくなる方向への回転である。これより最近傍点 X, Y は、この得られた基底 p_i, q_i を使って以下のように表される。

$$X = [p_1, \dots, p_k, q_{k+1}, \dots, q_l]$$

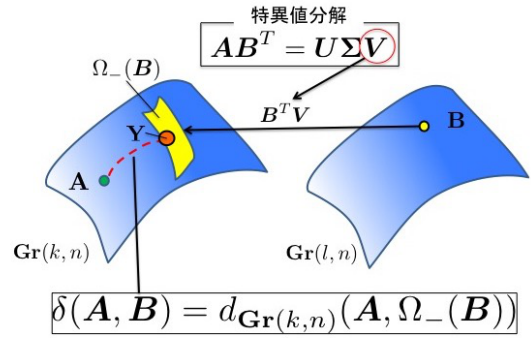
$$Y = [q_1, \dots, q_k]$$

X は次元数を補うのに、 A を B 類似度を測るのに影響を及ぼさない直交基底で次元の差を補っている。この X と B のグラスマン距離と、 Y と A のグラスマン距離は同値であり、 $\delta(A, B)$ は以下のように表される。

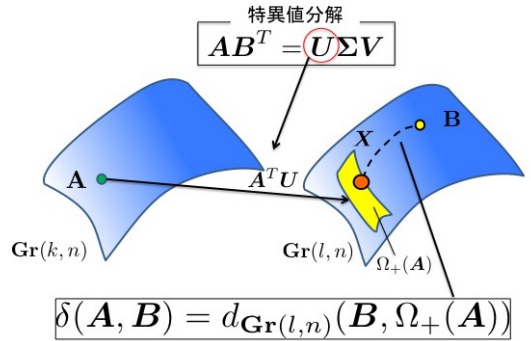
$$\delta(A, B) = d_{\text{Gr}(k, n)}(A, Y) = d_{\text{Gr}(l, n)}(B, X)$$

4. 提案手法

提案手法のアイデアとしては、部分空間を複数回射影することによって得られた集合とクエリの部分空間とのグラスマン距離を測ることで、Ye らの手法を実現することを考える。そして得られた集合の内、クエリの部分空間と最も近くなる集合を探索することで、グラスマン距離に基づく次元数の異なる部分空間の探索を実現する。そこで、集合の探索の方法として、2つの方法を提案する。一つめが Ye らの手法の定義に基づき、ク



(a) 低次元のグラスマン多様体に射影する場合



(b) 高次元のグラスマン多様体に射影する場合

図 6: Ye らの手法

エリの部分空間から最も近くなる点を含む集合を探索する手法 (提案手法 1)、そしてもうひとつが、それぞれの集合に含まれる点とクエリとの距離の平均の距離をクエリの集合との距離とし、もっとも近くなる集合を探索する手法 (提案手法 2) である。

4.1 提案手法 1

Ye らの手法での特異値分解は、図 6(a) において、射影により得られた集合 $\Omega_-(B)$ 内の最も近くなる点 Y , または図 6(b) における集合 $\Omega_+(A)$ 内の最も近くなる点 X を求めるための計算となっている。つまり、次元数の異なる部分空間同士のグラスマン距離の本質は、点 A と集合 $\Omega_-(B)$, もしくは点 B と集合 $\Omega_+(A)$ の最も近くなる距離であり、特異値分解は異なる次元のグラスマン距離の計算に不可欠な操作ではない。

そこで、提案手法はランダムに生成した回転行列により部分空間をグラスマン多様体に射影し、その操作を複数回繰り返すことにより、グラスマン多様体上に集合を生成することを考える。そして、部分空間と得られた集合との距離を求めることで、次元数の異なる部分空間同士のグラスマン距離を近似的に求めることができると考えられる。

ある部分空間を A, B とし、ここでは簡単のため、 B を A の属するグラスマン多様体に射影する場合を考える。ランダムに生成した回転行列を $W \in \mathbb{R}^{l \times n}$ とする。 W は特異値分解によって得られる右特異行列を近似したもので、 W により部分空間 B を特異値分解なしで、グラスマン多様体 $\text{Gr}(k, n)$ に射影させる。得られた $B^T W = [x_1 \dots x_l]$ の基底ベクトルの数を、 A の基底の数である k 個に削減することで、グラスマン多

様体 $Gr(k, n)$ 上に点 B' が得られる．これを複数回繰り返す事により，図 7 のように部分空間 B の集合がグラスマン多様体 $Gr(k, n)$ 上に得られる．そして得られた集合の内，部分空間 A と最も近くなる点とのグラスマン距離を A と B のグラスマン距離とすることで，Ye らの手法を近似的に実現する．

ここでこの回転の操作は，部分空間の基底を回転させることに対応しており，この操作では，部分空間そのものが変わることはなく，グラスマン多様体 $Gr(l, n)$ での座標に変化はない．そして基底を k 個まで削減することで，グラスマン多様体 $Gr(k, n)$ 上に 1 点として，得られる．Ye らによると， $\Omega_-(B)$ は $Gr(k, l)$ であり，この操作で得られる点は l 次元空間の k 次元部分空間であるので，集合 $\Omega_-(B)$ 内に射影されることが保証されている．

図 8 のように，これと同様の操作を，探索候補の他の部分空間に対しても行い，全ての部分空間の集合が同一のグラスマン多様体上に得られる．ここで，クエリの部分空間と最も近い部分空間を探索する手法である小西らの手法を適用する．Ye らの手法における，次元数の異なる部分空間同士のグラスマン距離は，クエリの点と集合内の最も近くなる点との距離であるため，図 8 のグラスマン多様体で小西らの手法を適用することによって，次元数の異なる部分空間同士のグラスマン距離に基づいた近似最近傍部分空間探索が実現できると考えられる．しかし，小西らの手法で用いられる Projection Kernel は類似度であり，Ye らの手法は距離を対象としたものであるので，Ye らの手法を近似的に実現するには，Projection Kernel を距離的な尺度に変換する必要がある．提案手法では以下のような処理により，Projection Kernel を距離的な尺度に変換した．以下，先述の A, B を使って説明する．

1. A と B の PK の取りうる最大値から，計算された PK 値を引く．
 2. 得られた値に対し，PK の取りうる最大値で正規化する．
1. により， A と B の類似度が大きいものほど，距離が小さくなる．また 2. の処理により， A と B の距離が PK の最大値によらず 0 から 1 の間の値で定義できる．

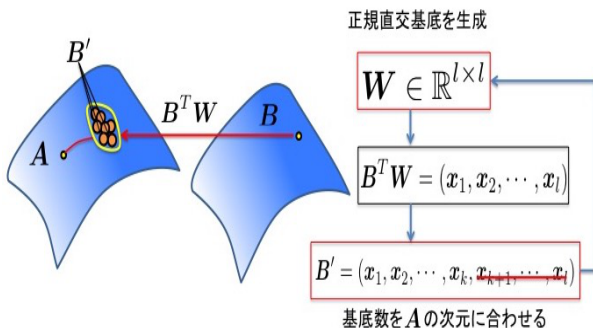


図 7: Ye らの手法の近似

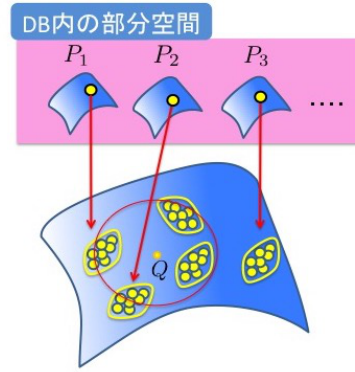


図 8: 提案手法

4.2 提案手法 2

提案手法 1 は Ye らの手法の点と集合の距離の定義に基づいた手法である．しかし，ランダムな射影のため，得られる集合が必ずしも Ye らの手法の最近傍点を含むというわけではなく，クエリから最も近くなる集合の順位が入れ替わることが起こりうる．そのため，高い精度を得るためには，射影回数を膨大にする必要がある．そこで，少ない射影回数でも安定した精度が得られる手法として，提案手法 2 を考案した．提案手法 2 は，提案手法 1 と同様，ランダムな回転行列による集合の生成を行う．そして，クエリと集合内の点の距離の平均の距離をクエリと集合の距離として，クエリから最も近くなる集合の探索する．具体的には，集合毎に投票された点の距離の合計に対し平均を取る．これにより，集合内に最近傍点を得られないことによる，順位が入れ替わる可能性を低減できると考えられる．

5. 実験

5.1 実験条件

提案手法の有効性を調べるために，手書き文字認識実験を行い，従来手法と比較した．従来手法は，相互部分空間法，Basri らの手法 (BHZ)，3.3 節で説明した Ye らの手法に geodesic distance [12] を適用したものである．Basri らの手法は，部分空間を高次元のユークリッド空間上の点に写像し，空間同士の問題から点同士の問題へ変換することで，近似最近傍探索の利用を実現している．提案手法は，回転行列による集合を生成した後，近似最近傍部分空間探索の従来手法として，小西らの手法を適用する．

全ての手法は C++ で実装した．また，実験に使用したコンピュータの CPU は Intel Xeon E54627 v2, 3.3GHz, メモリは 512GB である．提案手法で近似最近傍探索が必要なものには Bucket Distance Hashing (BDH) [13] を用いた．データセットとして手書き文字データベース ETL9B [14] を使用した．ETL9B は 1 字種あたり 200 サンプルが用意された，3036 字種が含まれている．文字画像は 64×64 画素で，2 値画像である．図 9 に一例を示す．文献 [15] の手法を使い， 64×64 画素に非線形正規化をした．特徴量は， 64×64 の画像の重複しない 4×4 の 16 画素の輝度値の和を 1 次元のとした 256 次元特徴量である．

認識結果を図 10 に示す．Basri らの手法が最も良い結果と

柔釜解棄はか佼訣栄館 共井晃顕煙閣庵河求句

図 9: ETL9B の一例

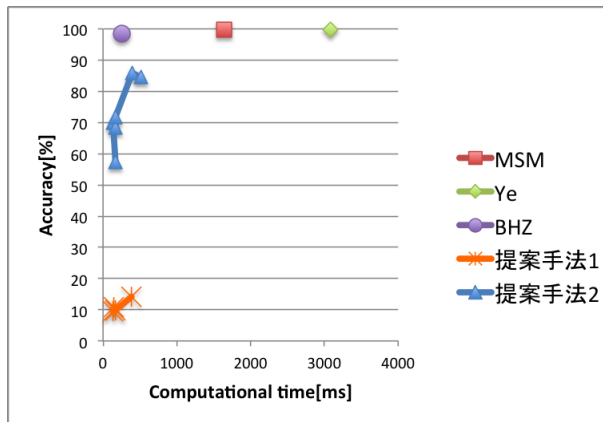


図 10: 実験結果

なった．提案手法 1 は，今回実験で行った射影回数では，集合内に最近傍点が得られないことによる，順位が入れ替わりが起こったと考えられる．提案手法 2 は，少ない射影回数でも，提案手法 1 に比べて高い精度があり，射影回数を増加させることで，認識精度が向上した．一方で，射影回数を増加させることで処理速度が増加した．これは，サンプル数の増加により，探索対象の数が増大したことによると考えられる．しかし，近似最近傍探索を利用した探索であるため，サンプル数の増加が処理速度に与える影響は小さく，Ye らの手法や相互部分空間法よりも高速となった．今回の実験では，Basri らの手法が最も良い結果であったが，提案手法で用いた小西らの手法の特徴であるスケーラビリティについての検証は行えてない．そこで今後の課題として，特徴量の次元数を増やし，提案手法の有効性を検討したい．

6. まとめ

本稿では，次元数の異なる部分空間同士の近似最近傍部分空間探索手法を提案した．次元数の異なるグラスマン距離の計算手法である Ye らの手法を近似的に計算し，高速な近似最近傍部分空間探索手法である小西らの手法と組み合わせることで次元数の異なる部分空間の探索を実現した．文字認識実験では，従来手法が最も良い結果となった．提案手法は，高い認識精度を出すには，グラスマン多様体に射影する部分空間の総数を増やす必要があるため，膨大なメモリを消費することになってしまった．今後は，射影回数についての検討を行い，提案手法のメモリ消費に焦点を当て，更なる改善を予定しているまた，特徴量の次元数が大きいデータセットでの実験を予定している．

謝辞 本研究の一部は，KDDI 研究助成，JST CREST，科研費基盤研究 (A) (25240028)，ならびに科研費挑戦的萌芽研究 (15K12172) の補助による．

文 献

- [1] P.K. Turaga, A. Veeraraghavan, A. Srivastava, and R. Chellappa, "Statistical computations on grassmann and stiefel manifolds for image and video-based recognition.," IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol.33, no.11, pp.2273–2286, 2011.
- [2] A. Sanin, C. Sanderson, M.T. Harandi, and B.C. Lovell, "Spatio-Temporal Covariance Descriptors for Action and Gesture Recognition," arXiv:1303.6021 [cs.CV], March 2013.
- [3] L. Wang, X. Wang, and J. Feng, "Subspace distance analysis with application to adaptive bayesian algorithm for face recognition," Pattern Recognition, vol.39, no.3, pp.456–464, 2006.
- [4] 前田賢一, "局所的構造を導入したパターン マッチング法," 信学論 (D), vol.68, no.3, pp.345–352, 1984 .
- [5] R. Basri, T. Hassner, and L. Zelnik-Manor, "Approximate nearest subspace search with applications to pattern recognition," Proc . 2007 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pp.1–8, June 2007.
- [6] X. Wang, S. Atev, J. Wright, and G. Lerman, "Fast subspace search via grassmannian based hashing," 2013 IEEE International Conference on Computer Vision, pp.2776–2783, Dec. 2013.
- [7] 小西将貴, 岩村雅一, 黄瀬浩一, "特徴空間の次元数と部分空間数にスケーラブルな近似最近傍部分空間探索," 信学技報, PRMU2014-124, pp.69–74, Feb. 2015 .
- [8] R. Basri, T. Hassner, and L. Zelnik-Manor, "A general framework for approximate nearest subspace search," Proc . 2009 IEEE 12th International Conference on Computer Vision Workshops, pp.109–116, Sept. 2009.
- [9] R. Basri, T. Hassner, and L. Zelnik-Manor, "Approximate nearest subspace search," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol.33, no.2, pp.266–278, Feb. 2011.
- [10] K. Ye and L.-H. Lim, "Schubert varieties and distances between subspaces of different dimensions," arXiv:0706.1234 [math.FA], July 2014.
- [11] J. Hamm and D.D. Lee, "Grassmann discriminant analysis: a unifying view on subspace-based learning," Proc. International Conference on Machine Learning, pp.376–383, 2008.
- [12] A. Edelman, T.A. Arias, and S.T. Smith, "The Geometry of Algorithms with Orthogonality Constraints," ArXiv Physics e-prints, June 1998.
- [13] M. Iwamura, T. Sato, and K. Kise, "What is the most efficient way to select nearest neighbor candidates for fast approximate nearest neighbor search?," Proc. 14th International Conference on Computer Vision (ICCV 2013), pp.3535–3542, Dec. 2013.
- [14] 齊藤泰一, 山田博三, 山本和彦, "JIS 第 1 水準手書漢字データベース ETL9 とその解析," 信学論 (D), vol.J68-D, no.4, pp.757–764, April 1985 .
- [15] H. Yamada, K. Yamamoto, and T. Saito, "A nonlinear normalization method for handprinted kanji character recognition line density equalization," Pattern Recognition, vol.23, no.9, pp.1023–1029, 1990 .